ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 30 AOUT 1948.

PRÉSIDENCE DE M. Louis BLARINGHEM.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE DIMENSIONNELLE. — *Action d'une variation du nombre des grandeurs choisies comme principales sur les variables de Vaschy.* Note (*) de M. **Robert Esnault-Pelterie.**

Terminologie. — On se plaît à confondre sous la dénomination de *grandeurs fondamentales* les grandeurs directement mesurables ou non ([1]) auxquelles on fait jouer un rôle particulier dans les calculs; c'est, une fois de plus, faire primer une catégorisation humaine sur une catégorisation naturelle, et cela fausse complètement la signification de nos images noocosmiques ([2]) des réalités physiques.

Je réserverai la dénomination de *fondamentales* aux trois grandeurs directement mesurables ([3]), et nommerai *principales* celles auxquelles le mathématicien *peut, s'il le désire,* faire jouer un rôle particulier dans ses calculs, qu'elles soient directement mesurables ou non.

I. Considérons un phénomène physique dans lequel interviennent n grandeurs physiques $G_1, G_2, \ldots, G_n$; cela veut dire que, si nous donnons des valeurs déterminées $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ à $(n-1)$ d'entre elles, la $n^{\text{ième}}$, G_n, prendra une valeur déterminée g_n, les g représentant ainsi des *mesures*.

Pour calculer les variables ϖ de Vaschy dans le cas où les trois grandeurs fondamentales L, M, T sont prises comme principales, disposons nos paramètres, leurs dimensions α, β, γ, et leurs exposants x_j, y_j, z_j, a_j inconnus,

---

(*) Séance du 18 août 1948.

([1]) Au sens défini dans l'*Analyse dimensionnelle*, n° 4-2, p. 37.

([2]) *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 606.

([3]) *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 608.

dans les ϖ, en un tableau comme je l'ai indiqué ([4]).

$$
(1) \qquad
\begin{array}{cccc}
g_1 & g_2 & g_3 & g_j \\
\hline
L^{\alpha_1} & L^{\alpha_2} & L^{\alpha_3} & L^{\alpha_j} \\
M^{\beta_1} & M^{\beta_2} & M^{\beta_3} & M^{\beta_j} \\
T^{\gamma_1} & T^{\gamma_2} & T^{\gamma_3} & T^{\gamma_j} \\
\hline
x_j & y_j & z_j & a_j
\end{array}
\qquad (j = 4, 5, 6, \ldots, n).
$$

Ne considérant que des ϖ principaux, pour lesquels $a_j = 1$, leur formule générique sera

$$
(2) \qquad \varpi_j = g_1^{x_j} g_2^{y_j} g_3^{z_j} g_j
$$

et, comme ils sont dénués de dimensions, nous aurons les trois équations linéaires

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j + \alpha_3 z_j + \alpha_j = 0, \\
\beta_1 x_j + \beta_2 y_j + \beta_3 z_j + \beta_j = 0, \\
\gamma_1 x_j + \gamma_2 y_j + \gamma_3 z_j + \gamma_j = 0;
\end{array}
\right.
$$

leur solution est

$$
(4) \qquad \left\{
x_j = \frac{-\begin{vmatrix} \alpha_j & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_j & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_j & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}, \quad
y_j = \frac{-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_j & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_j & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_j & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}}, \quad
z_j = \frac{-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_j \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_j \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}},
\right.
$$

dont nous appellerons $\Delta \neq 0$ le dénominateur commun.

Ce résultat dépend visiblement des grandeurs qui ont été mises en évidence; on peut démontrer qu'il est indépendant du choix des grandeurs principales. Le raisonnement ci-dessus s'étend facilement à un nombre quelconque de grandeurs principales ([5]).

II. Supposons maintenant que nous prenions quatre grandeurs principales, il nous faudra récrire le tableau (1) en y mettant quatre grandeurs en évidence : G_1, G_2, G_3 et G_4 par exemple.

Nous savons que les ϖ que nous obtiendrons seront les mêmes, quelles que soient les grandeurs principales; choisissons donc L, M, T et précisément G_4. Cette dernière étant considérée comme principale, ne sera fonction d'aucune

---

([4]) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1937. L'auteur s'excuse d'une erreur qui ne figurait pas sur les épreuves; M de droite à transposer d'une colonne vers la droite.

([5]) *L'Analyse dimensionnelle*, n° 34, p. 131. La démonstration peut se faire plus élégamment par les déterminants, ce qui en procure la généralisation immédiate.

autre et le tableau devient

$$(5)\qquad \begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_j \\ \hline L^{\alpha_1} & L^{\alpha_2} & L^{\alpha_3} & L^0 & L^{\alpha'_j} \\ M^{\beta_1} & M^{\beta_2} & M^{\beta_3} & M^0 & M^{\beta'_j} \\ T^{\gamma_1} & T^{\gamma_2} & T^{\gamma_3} & T^0 & T^{\gamma'_j} \\ G_4^0 & G_4^0 & G_4^0 & G_4^1 & G_4^{\delta_j} \\ \hline x'_j & y'_j & z'_j & u_j & 1 \end{array} \qquad (j=5,\,6,\,7,\,\ldots,\,n).$$

Nous voyons que le déterminant du quatrième degré, Δ_2, caractérisque du tableau des exposants, sera

$$(6)\qquad \Delta_2 = 1 \times \Delta,$$

dénominateur commun de x'_j, y'_j, z'_j et u_j.

Nous ne saurions aller plus loin par des considérations purement mathématiques; il nous faut supposer que, *physiquement*, l'un des G puisse être considéré comme une fonction de L, M, T et G_4.

Supposons que ce soit G_5; il existe alors une relation

$$(7)\qquad G_5 = L^{\alpha'_5} M^{\beta'_5} T^{\gamma'_5} G_4^{\delta_5},$$

et les exposants ci-dessus seront liés à ceux de (1) par les relations

$$(8)\qquad \alpha'_5 = \alpha_5 - \delta_5\alpha_4, \qquad \beta'_5 = \beta_5 - \delta_5\beta_4, \qquad \gamma'_5 = \gamma_5 - \delta_5\gamma_4.$$

Les numérateurs de x'_5, y'_5, z'_5, u_5 se réduisent comme l'avait fait Δ_2, à des déterminants du troisième degré :

$$(9)\qquad -\begin{vmatrix} \alpha'_5 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta'_5 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma'_5 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_5 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta'_5 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma'_5 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha'_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta'_5 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma'_5 \end{vmatrix}, \qquad -\delta_5\Delta;$$

x'_5, y'_5, z'_5 ont donc une expression analogue à celle des x, y, z, où les indices $_j$ sont remplacés par les $'_5$ et les expressions (8) nous montrent que les déterminants numérateurs (9) peuvent être décomposés chacun en une différence de deux déterminants.

Écrivons

$$(10)\qquad \varpi_4 = g_1^{x_4} g_2^{y_4} g_3^{z_4} g_4,$$

$$(11)\qquad \varpi_5 = g_1^{x_5} g_2^{y_5} g_3^{z_5} g_5,$$

$$(12)\qquad {}_4\varpi_5 = g_1^{x'_5} g_2^{y'_5} g_3^{z'_5} g_4^{u_5} g_5;$$

effectuant les différences de déterminants ci-dessus, et le dénominateur commun étant Δ pour tous, on est conduit à

$$(13)\qquad x'_5 = x_5 - \delta_5 x_4, \qquad y'_5 = y_5 - \delta_5 y_4, \qquad z'_5 = z_5 - \delta_5 z_4, \qquad u_5 = -\delta_5.$$

Nous avons donc

$$(14) \qquad {}_4\varpi_5 = g_1^{x_5 - \delta_5 x_4} g_2^{y_5 - \delta_5 y_4} g_3^{z_5 - \delta_5 z_4} g_4^{-\delta_5} g_5$$

et finalement,

$$(15) \qquad {}_4\varpi_5 \doteq \varpi_4^{-\delta_5} \varpi_5.$$

On appliquera facilement ce qui précède au cas classique où, dans un problème, on veut introduire les quantités de chaleur Q comme entités *sui-generis :*

Supposons par exemple, que les grandeurs en jeu soient écrites dans l'ordre θ (température absolue), l (longueur), w (vitesse), Q (quantité de chaleur), dQ/dt (flux de chaleur) et les grandeurs principales dans l'ordre L, M, T, Q ; on trouvera, dans le système L, M, T, où θ et Q ont, tous deux, les dimensions L^2MT^{-2} d'un travail,

$$(16) \qquad \varpi_4 = Q.\theta^{-1}, \qquad \varpi_5 = \frac{\frac{dQ}{dt} l}{\theta w}$$

et dans le système L, M, T, Q,

$$(17) \qquad {}_4\varpi_5 = \varpi_5 . \varpi_4^{-1} = \frac{\frac{dQ}{dt} l}{\theta w} \frac{\theta}{Q}.$$

J'aurai l'occasion de reprendre cet exemple ailleurs.

On voit une fois de plus qu'un semblable résultat ne peut s'obtenir qu'à partir de considérations *physiques*, et non pas de considérations purement mathématiques où l'on s'obstine en cette matière.

DYNAMIQUE DES FLUIDES. — *Écoulement théorique et médian dans un rotor à palettes radiales*. Note de M. **Maurice Roy**.

1. Considérons, dans son plan de symétrie $z = 0$, le flux relatif et permanent d'un *liquide*, sans viscosité ni action massique, à travers un rotor tournant à vitesse ω uniforme ($\omega > 0$) autour de son axe z, rotor à N palettes planes, rayonnantes et espacées de $2\pi/N$ entre les cylindres de rayons r_1 et r_2. Admettons que, sur le parallèle extérieur $r = r_2$ et au voisinage du plan $z = 0$, les lignes de courant soient parallèles au dit plan. Les flasques, symétriques par rapport au plan $z = 0$ et qui limitent latéralement le rotor, sont tangents, sur le parallèle $r = r_2$, à deux plans $z = \pm$ const., mais leur coupe par tout cylindre de rayon $r \neq r_2$ est une ligne ondulée, de période $2\pi/N$, et non un cercle.

Le tourbillon *absolu* est supposé nul par le théorème de Lagrange, donc la constante de Bernoulli uniforme dans le flux relatif permanent.

Dans le plan médian $z = 0$, plan de la variable complexe $z' = x + iy = re^{i\theta}$, la vitesse relative, de composantes axiale w_z, radiale w_r et tangentielle (directe) w_τ, vérifie les trois équations (irrotationnalité absolue, continuité,

symétrie)

$$(1)\qquad \frac{\partial w_\tau}{\partial r}+\frac{w_\tau}{r}-\frac{\partial w_r}{\partial \tau}+2\omega=0;\qquad \frac{\partial w_z}{\partial z}+\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{w_r}{r}+\frac{\partial w_\tau}{\partial \tau}=0;\qquad \dot{w}_z\equiv 0.$$

2. On satisfera à (1) et aux conditions aux limites du problème en superposant *dans le plan médian* : *a*. le mouvement plan, de rotation uniforme $-\omega$ autour de l'axe z; *b*. un mouvement plan (à accent simple), irrotationnel et à divergence nulle, dérivant d'un potentiel complexe $f(z')$; *c*. un mouvement radial (à accent double), aussi irrotationnel et de même débit que le mouvement d'ensemble (à travers le cylindre r_2 et entre deux plans parallèles, de cote $z=\pm\varepsilon$, ε petit).

Pour simplifier, on suppose ici le courant (c) obtenu par deux sources ponctuelles, de cotes ($z=\pm 2r_2$; $r=0$) et de débit-volume Q, et par deux anneaux-puits, circulaires et uniformes, de cotes ($z=\pm 2r_2$; $r=r_2$) et de débit total Q′ négatif et tel que l'écoulement radial soit parallèle au plan $z=0$ pour $z=\pm\varepsilon$ et $r=r_2$. Un anneau-source, à l'infini du plan $z=0$, contribue à ce courant (c), dont les vitesses sont, avec $\zeta=r/r_2$:

$$(2)\quad w''_z\equiv w_z,\qquad w''_r=\frac{Q}{2\pi r_2^2}\left[\frac{\zeta}{(4+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1,254}{\pi}\int_0^\pi\frac{\zeta-\cos\alpha}{[5-2\zeta\cos\alpha+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}d\alpha\right],\qquad w''_\tau\equiv 0.$$

Le courant (b) doit satisfaire à $w'_\tau=\omega r$ sur les deux faces des palettes radiales; d'où, sur cette frontière, une valeur donnée $-\omega r^2$ pour la partie imaginaire de $g(z')\equiv z'\,df/dz'=r(w'_r-iw'_\tau)$.

La transformation conforme

$$(3)\qquad 2z'^{N}=\frac{\beta^2+a^2}{\beta}+Z+\frac{a^2}{Z},\qquad \text{avec}\quad \frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta}=r_2^N+r_1^N;\qquad 2a=r_2^N-r_1^N,$$

fait correspondre le plan z', coupé par les palettes radiales, au plan $Z\equiv Re^{i\Theta}=\mu.ae^{i\Theta}$, troué par le cercle $|\mu|=1$. Au centre $z'=0$ du rotor primitif correspond $Z=-\beta$; les moitiés supérieure ($0\leq\Theta\leq\pi$) et inférieure ($\pi\leq\Theta\leq 2\pi$) de la circonférence $|\mu|=1$ correspondent aux faces AV et AR des palettes dans le sens de la rotation $\omega(\omega>0)$.

Par (3), $g(z')$ devient G(Z), où la *circulation autour du cercle* $|\mu|=1$, donc d'une palette, est disponible pour que w'_r s'annule au bord extérieur ($r=r_2$) ou intérieur ($r=r_1$) de la palette, c'est-à-dire pour $\Theta=0$ ou π.

On obtient ainsi, pour le courant (b) où $w'_z\equiv 0$, avec $\lambda=r_2/r_1$ et $\mu>1$:

$$(4)\begin{cases} r(w'_r-iw'_\tau)=G(Z)=\omega r_1^2\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[1+(\lambda^N-1)\cos^2\varphi]^{\frac{2}{N}}\frac{2\mu\sin(2\varphi-\Theta)-i(\mu^2-1)}{1-2\mu\cos(2\varphi-\Theta)+\mu^2}d\varphi+kH\right];\\ k=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[1+(\lambda^N-1)\cos^2\varphi]^{\frac{2}{N}-1}d\varphi;\\ \begin{cases} H=\frac{-2\mu\sin\Theta+i(\mu^2-1)}{1+2\mu\cos\Theta+\mu^2},\qquad \text{ou}\qquad H=\lambda^N\frac{2\mu\sin\Theta+i(\mu^2-1)}{1-2\mu\cos\Theta+\mu^2},\\ \text{si}\quad w'_r=0\qquad\text{pour}\quad \Theta=0\quad\text{ou}\quad\pi.\end{cases}\end{cases}$$

Par (2) et (4) et par addition des écoulements (*a*), (*b*) et (*c*), on obtient le *courant relatif et permanent cherché*, soit

$$w_z = w''_z \equiv 0; \qquad w_r = w'_r + w''_r; \qquad w_\tau = -\omega r + w'_\tau.$$

3. En particulier, *sur les faces* AV *et* AR *des palettes* ($\mu \to 1$), où (4) ne s'applique qu'avec les précautions d'usage, on a $w_\tau \equiv 0$ par définition et, selon que w'_r est nul sur l'arête extérieure ou intérieure,

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda^2 \zeta \psi'_1 = h - k \operatorname{tg}\dfrac{\Theta}{2}, \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 \zeta \psi'_1 = h + \lambda^N k \cot\dfrac{\Theta}{2}; \\ \text{avec} \quad \psi'_1 = \left(\dfrac{w'_r}{\omega r_2}\right)_{\mu \to 1} \qquad \text{et} \qquad h = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi [1 + (\lambda^N - 1)\cos^2 v]^{\frac{2}{N}} \cot\left(v - \dfrac{\Theta}{2}\right) dv. \end{cases}$$

En ajoutant alors le courant radial donné par (2), centrifuge ou centripète selon le signe $\pm$ de Q, on obtient la *distribution de* w *sur les faces* AV *et* AR *des palettes*.

4. Si l'*arête intérieure* est point neutre ($w'_r = 0$, w_r fini), il existe un second point neutre très rapproché. Alors, sur la quasi-totalité des faces de palette, la vitesse radiale est extrêmement grande, même pour un coefficient de débit $\delta = Q/2\pi r_2^3 \omega$ petit : le flux devrait donc contourner la palette pour refluer sur presque toute sa longueur.

Physiquement et tant que $|\delta|$ n'est pas très grand, l'hypothèse d'un *point neutre à l'arête extérieure* est plus vraisemblable, même lorsque cette arête fonctionne en bord d'attaque pour un flux centripète (la meilleure image de la réalité correspond sans doute à un cas assez proche de cette hypothèse-limite).

Dans cette hypothèse, on note que le second point neutre se déplace très rapidement vers l'arête intérieure dès que δ dépasse un certain *seuil*. Par exemple, pour $\lambda = 2$ et $N = 12$, si δ passe de 10,5 à 30,5, ce point neutre reflue de 90 % *à* 10 % *de la longueur radiale de la palette* (face AV ou AR, selon que le flux est centrifuge ou centripète).

Cette évolution de l'écoulement en fluide *parfait* est à rapprocher de l'existence du *seuil de pompage en fluide réel :* si, pour une différence donnée de pression moyenne entre $r = r_2$ et $r = 0$, le débit centrifuge devient trop faible, l'écoulement théorique ci-dessus perd toute vraisemblance physique et il s'y substitue un écoulement centripète, avec inversion du rôle des faces AV et AR, donc du couple exercé par le flux sur la roue. En fluide réel, ce flux est lui-même instable et l'écoulement vrai doit osciller ainsi entre deux formes instables et presque inverses, avec décollement accentué dans chaque cas sur le bord d'attaque.

Le problème résolu ci-dessus paraît *susceptible de guider l'étude théorique du pompage*, accompagnée de la visualisation des écoulements envisagés pour apprécier sa correspondance avec la réalité physique.

CORRESPONDANCE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la notion de facteur commun en analyse factorielle générale.* Note de M. **Maurice Girault**, présentée par M. Gustave Ribaud.

On sait que l'analyse factorielle classique se propose de reproduire des liaisons stochastiques entre variables aléatoires en considérant celles-ci comme des combinaisons linéaires de variables aléatoires indépendantes. On peut généraliser ce point de vue en remplaçant les fonctions linéaires par des fonctions plus générales, astreintes toutefois à des conditions de régularité.

Dans le cas le plus simple de l'analyse factorielle linéaire, les variables liées stochastiquement sont mises sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a + b, \\ y = a + c, \end{cases}$$

a, b, c étant indépendantes, x et y sont alors *toujours* des variables dépendantes, a est appelé le facteur commun.

La généralisation de (1) prendra la forme, où F et G sont régulières,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = F(a, b), \\ y = G(a, c), \end{cases}$$

x et y seront alors en général dépendantes.

Mais le fait nouveau, et le but de cette Note est de le montrer, c'est qu'il peut arriver, malgré la présence du facteur commun a, que x et y seront indépendantes, si les fonctions F et G sont convenablement choisies.

Exemple. — a, b, c seront supposées indépendantes et à densité de probabilité constante dans l'intervalle -1, $+1$. Prenons

$$(3)\qquad \begin{cases} x = ab, \\ y = \dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{a}\sqrt{4 + a^2 - 4ac} \end{cases} \quad \text{(radical pris toujours avec le signe +)};$$

x varie alors de -1 à $+1$. Dans le plan des a, b, les courbes $x =$ const. sont des morceaux d'hyperbole.

y varie aussi de -1 à $+1$. Les courbes $y =$ const. sont, dans le plan des a, c, des morceaux des droites

$$c = \frac{a}{4}(1 - y^2) + y.$$

Dans ces conditions, on calcule aisément les probabilités

$$P[x < X], \qquad P[y < Y], \qquad P[x < X, y < Y].$$

Si $f_1(aX)$ est la mesure du segment parallèle à ob, d'abscisse a contenu dans le domaine $x < X$, on aura

$$P(x < X) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} f_1(aX)\,da = \frac{1 + X + \log\left(\frac{1}{X}\right)X}{2} \qquad (X > 0).$$

De même, avec des notations évidentes,

$$P[y < Y] = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} g_1(aY)\,da = \frac{1+Y}{2},$$

$$P[x < X, y < Y] = \frac{1}{8}\int_{-1}^{+1} f_1(aX)\,g_1(aY)\,da.$$

On voit aisément que cette dernière expression est égale au produit des deux premières.

Par conséquent, les variables aléatoires a et y sont indépendantes.

Remarques générales. — On voit immédiatement que la condition d'indépendance dans les conditions des équations (2) est que la valeur moyenne d'un produit soit égale au produit des valeurs moyennes

$$E[f_1(aX)\,g_1(aY)] = E[f_1(aX)] \times E[g_1(aY)].$$

Si l'on introduit les différences

$$f(aX) = f_1(aX) - E(f_1),$$
$$g(aY) = g_1(aY) - E(g_1),$$

la condition, nécessaire et suffisante, devient

$$E(f \times g) = 0.$$

Or, il suffit d'imposer les conditions

$$f(a, X) = f(-a, X),$$
$$g(a, Y) = -g(-a, Y),$$

pour que cette condition soit remplie, a variant de -1 à $+1$.

La première condition exprime une symétrie par rapport à l'axe $a = 0$. La deuxième exprime une symétrie par rapport à un point de cet axe.

L'exemple qui a été donné est construit de manière à présenter cette disposition.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les développements tayloriens d'une fonction.* Note de M. **André Roussel**, transmise par M. Élie Cartan.

Soit $g(x, h)$ une fonction des deux variables complexes x et h, holomorphe dans le domaine formé par l'ensemble de deux cercles C et C′, de rayons R

et R′ tracés respectivement dans les plans complexes x et h, avec pour centres les points $x = a$ et $h = 0$.

Nous supposons que g s'annule identiquement avec h. Considérons le développement suivant, illimité dans les deux sens

$$(1)\qquad \sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x, h) + g(x, h) + \sum_{m=1}^{+\infty} g_n(x, h)$$

obtenu, à partir de g de la façon suivante :

Un terme de rang positif g_n s'obtient en intégrant successivement n fois g par rapport à h de 0 à h, puis en dérivant n fois par rapport à x le résultat ainsi obtenu. Un terme de rang négatif g_{-m} s'obtient en dérivant m fois g par rapport à h, puis en intégrant successivement m fois par rapport à x de a à x, et en retranchant enfin de la fonction ainsi obtenue sa propre valeur pour $h = 0$. J'ai démontré que si :

$$|x - a| + |h| \leq \rho,$$

où ρ est un nombre positif inférieur à R et R′, le développement (1) était absolument et uniformément convergent et avait pour somme l'accroissement de la fonction

$$(2)\qquad f(x) = g(a, x - a) + \int_0^{x-a} g'_x(x - t, t)\, dt.$$

Si dans (1) on remplace x par a et h par $x - a$, on obtient pour $f(x)$ le développement suivant :

$$(3)\qquad f(x) - f(a) = g(a, x - a) + \sum_1^{+\infty} g_n(a, x - a),$$

les termes de rang négatifs dans (1) s'annulant alors.

Inversement, donnons-nous une fonction $f(x)$ holomorphe dans le domaine du point a. *Proposons-nous de mettre cette fonction sous la forme d'un développement du type* (3). Le problème est possible d'une infinité de façons. Nous dirons que de tels développements sont des *développements tayloriens de* $f(x)$. La question revient à déterminer les fonctions $g(x, h)$ telles que

$$(4)\qquad g(a, x - a) + \int_0^{x-a} g'_x(x - t, t)\, dt = f(x) - f(a),$$

l'inconnue étant ici $g(x, h)$ et $f(x)$ étant donnée. *Ce problème revient à la résolution d'une équation intégrale d'un type classique*. Donnons-nous arbitrairement un noyau $K(s, t)$, holomorphe dans le voisinage de $s = 0$, $t = 0$. Soit $u(s)$ la solution de l'équation intégrale

$$(5)\qquad u(s) - \int_0^s K(s, t)\, u(t)\, dt = f(a + s) - f(a).$$

On voit facilement que la solution de (4) est donnée par

$$(6) \qquad g(x, h) = -u(h)\int_h^{x-a+h} \mathrm{K}(\sigma, h)\, d\sigma + u(h).$$

D'où pour $f(x)$ un développement taylorien correspondant, l'accroissement de cette fonction étant donné par (1). Ces résultats généralisent le théorème classique de Taylor qui se retrouve comme cas particulier. En effet, en supposant $f'(a) \neq 0$, posons

$$\mathrm{K}(s, t) = -\frac{f''(a+s-t)}{f'(a)},$$

la solution de (5) est alors

$$u(s) = f'(a)s,$$

d'où par (6)

$$g(x, h) = hf'(x).$$

Le développement correspondant (1) est alors le développement classique de Taylor donnant l'accroissement de f, le développement analogue (3) étant celui de cette fonction suivant les puissances entières et positives de $x - a$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une propriété de certaines équations fonctionnelles*. Note (*) de M. **Yves Rocard**, transmise par M. Henri Villat.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} + ay_{(t-\tau)} = 0,$$

a et τ étant des constantes réelles positives. Elle évoque l'idée de phénomènes dont la vitesse à l'instant t est réglée par une quantité existant à l'instant $t - \tau$, τ étant un délai (délai de fabrication, retard dû à une administration, temps nécessaire à la nature pour faire pousser une récolte, etc.) et l'on conçoit que l'étude des phénomènes économiques et sociaux amène des équations de ce genre :

Ainsi, la quantité dy des recherches entreprises ($dy > 0$) ou arrêtées ($dy < 0$) par exemple dans tel grand Ministère dans le temps dt, est proportionnelle au nombre des études dont on voit se dessiner les résultats au bout d'un temps τ, avec un coefficient $-a$ plutôt grand, parce qu'on a très envie de recherches, mais négatif, parce que les résultats des recherches n'incitent guère à en entreprendre de semblables, d'où

$$dy = -ay_{(t-\tau)}\, dt,$$

ce qui donne l'équation (1).

(*) Séance du 18 août 1948.

Une étude élémentaire montre que cette équation a des solutions stables (amorties après une excitation) pour $a\tau < \pi/2$ et instables pour $a\tau > \pi/2$. L'histoire des recherches dans l'Aéronautique confirme bien que des cas instables existent.

Une généralisation immédiate fait intervenir une distribution $f(\tau)$ de temps τ et amène à considérer l'équation

$$\frac{dy}{dt} + a\int_0^\infty f(\tau)\, y_{t-\tau}\, d\tau = 0, \tag{2}$$

avec $f(\tau)$ normalisé tel que

$$\int_0^\infty f(\tau)\, d\tau = 1.$$

On appellera centre de gravité τ_1 des temps τ un temps τ_1 moyen tel que

$$\int_0^\infty (\tau - \tau_1)\, f(\tau)\, d\tau = 0,$$

et l'on conviendra d'appeler *étalement* d'une courbe de probabilité $f(\tau)$ toute modification à cette loi qui, en respectant le centre de gravité τ_1 ainsi défini augmente à la fois les deux intégrales égales

$$\int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \tau)\, f(\tau)\, d\tau \qquad \text{et} \qquad \int_{\tau_1}^\infty (\tau - \tau_1)\, f(\tau)\, d\tau.$$

Autrement dit, une loi de probabilité $f_1(\tau)$ ayant le même centre de gravité τ_1 que la loi $f(\tau)$ est plus étalée si l'on a

$$\int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \tau)\, f_1(\tau)\, d\tau > \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

Dans ces conditions, on démontre le théorème suivant :

Toutes choses égales d'ailleurs, si $f_1(\tau)$ est plus étalée que $f(\tau)$, les solutions de

$$\frac{dy}{dt} + a\int_0^\infty f_1(\tau)\, y_{t-\tau}\, d\tau = 0 \tag{3}$$

sont plus stables que les solutions de

$$\frac{dy}{dt} + a\int_0^\infty f(\tau)\, y_{t-\tau}\, d\tau = 0. \tag{4}$$

D'une manière plus précise, c'est en faisant croître le paramètre a à partir de zéro que l'on rencontre l'instabilité limite, disons pour $a = a_1$ avec l'équation (3), et pour $a = a_0$ avec l'équation (4). Notre théorème consiste dans le fait que *$a_1 > a_0$ si $f_1(\tau)$ est plus étalée que $f(\tau)$*.

La démonstration consiste dans la définition d'un élément élémentaire, pour

lequel on établit facilement la propriété énoncée, et dans la remarque que tout étalement d'ensemble résulte d'une suite d'étalements élémentaires.

L'intérêt d'une telle propriété dans les raisonnements économétriques est évident; avec ce théorème, on condamne le dirigisme (sur des cas particuliers) parce qu'il n'a qu'un seul temps τ, ou bien on combine un dirigisme intelligent avec des distributions $f(\tau)$ plus étalées, pour éviter les crises (signalons en passant cet autre théorème : *toute augmentation de* τ_1 *amène une variation inversement proportionnelle de la limite* a_0 *du paramètre* a, *donc favorise l'instabilité*, théorème plus important encore, qui conduit le contribuable, le fournisseur de l'État et bien d'autres à réclamer la diminution du temps τ_1, mais ceci est presque banal).

Il est évident que si l'on se contente d'un énoncé vague, tel que le suivant : *l'étalement de* $f(\tau)$ *augmente la stabilité*, la propriété qui fait l'objet de cette Note s'applique à des équations bien plus générales que (2), équations fonctionnelles, linéaires, avec temps de retard et loi de distribution de ces temps, et il est probable que nous sommes en présence d'une propriété, d'une signification philosophique assez profonde donnant naissance à quantités d'énoncés mathématiques particuliers.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Enchaînement et quantification : une généralisation du théorème de Darboux à propos du rotateur sphérique.* Note de M. **Gabriel Viguier**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous avons précédemment montré, faisant choix du cas particlier de l'oscillateur harmonique linéaire ([1]) ou de la vibration moléculaire quatrième puissance ([2]), qu'il était possible de faire correspondre à la théorie des quanta des notions métriques liées à l'équation classique de Riccati et ainsi aborder le discontinu par le continu ou inversement.

Nous prenons, dans la présente Note, le rotateur sphérique ([3]) pour lequel nous repérons les différents points par la colatitude θ et la longitude φ.

La fonction d'ondes étant ψ, l'existence d'états stationnaires permet le changement de fonction

$$Y_k = \psi\, e^{-\frac{2\pi i}{h} E_k t},$$

où $Y_k(\theta, \varphi)$ est la fonction sphérique de Laplace.

E_k est l'énergie d'oscillation pour laquelle les valeurs propres sont données

([1]) *Comptes rendus*, **224**, 1948, p. 1958.

([2]) *Comptes rendus*, **227**, 1948, p. 266.

([3]) Louis de Broglie, *Théorie de la quantification dans la Nouvelle Mécanique*, Paris, 1932.

par la relation

$$E_k = \frac{h^2}{8\pi^2 I} k(k+1); \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posant alors $x = \cos\theta$, nous considérons le polynome de Legendre associé $P_k^m(x)$ défini par

$$Y_k(\theta, \varphi) = e^{\pm im\varphi} P_k^m(x) \qquad \text{(avec } m \text{ entier positif)}.$$

Avec de telles hypothèses, l'équation de propagation se réduit à

$$(1) \qquad \sin^2\theta \frac{d^2 P_k(x)}{dx^2} - 2\cos\theta \frac{dP_k(x)}{dx} + k(k+1) P_k(x) = 0.$$

Il est aisé de passer au premier ordre et en particulier à la forme de Riccati; nous avons

$$(2) \qquad \frac{d\tau}{dx} + \frac{\tau^2}{1-x^2} + k(k+1) = 0.$$

Les résultats précédemment obtenus à propos des polynomes d'Hermite H_k rencontrés dans l'étude de l'oscillateur de Planck se retrouvent ici encore, et nous voyons que les polynomes de Legendre peuvent être associés à des notions métriques classiques, telles que celles résultant de la théorie des développantes généralisées planes (4).

Dans ce cas, nous trouvons une famille de courbes-base isométriques pour lesquelles la fonction d'arc est $\sigma' = k(k+1)$.

Ainsi, une fois encore, nous voyons qu'il est possible d'aborder une théorie oscillatoire à partir d'isométriques de cercles en particulier.

Prenant trois états énergiques quelconques : $(k-1)$, k, $(k+1)$, nous avons entre courbes-base et courbes-adjointes correspondantes la relation géométrique simple

$$\overline{M_k M_{k-1}} + \overline{M_k M_{k+1}} = \overline{L_k L_{k-1}} + \overline{L_k L_{k+1}} = 2.$$

Mais à la forme de Riccati (2) nous préférons la forme canonique

$$(3) \qquad \frac{dv}{dx} + v^2 = \frac{k(k+1)}{x^2-1},$$

que l'on peut d'ailleurs écrire

$$(4) \qquad \frac{V''}{V} = k\frac{k+x^2}{x^2-1} - k.$$

Si nous voulons alors, à partir de (4), aborder la formation de chaînes d'équations il nous faut généraliser le théorème de Darboux (5) qui, sous sa forme classique, est inapplicable dans notre cas.

(4) G. Viguier, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 59, 1945, L, IX (sous presse).

(5) G. Darboux, *Théorie générale des Surfaces*, 1 et 2.

La généralisation conduit au chaînon d'ordre n dont l'équation est

$$(5)\qquad \frac{V''_n}{V_n}=\frac{k(k+1)}{x^2-1}+\frac{n(n+2)}{(x^2-1)^2}.$$

Il devient par suite possible de ramener à des quadratures l'intégration de (2) grâce à la chaîne de Darboux (4), ..., (5) et suivant les différents niveaux d'énergie $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Enchaînement et quantification sont donc des notions qui s'associent encore avec harmonie et, comme le disait M. A. Buhl [6] : « Le théorème de Darboux, donné par son illustre auteur en 1882, apparaît de plusieurs manières comme un théorème dont l'intérêt n'est pas épuisé à l'heure actuelle ».

RADIOÉLECTRICITÉ. — *Sur un oscillateur à double-triode et son application à l'étude des diélectriques.* Note (*) de M. **Robert Létienne**, transmise par M. Aimé Cotton.

Nous nous proposons de décrire tout d'abord un oscillateur présentant de réels avantages sur les montages classiques. Il se signale par sa grande stabilité de fréquence et d'amplitude et par le faible taux d'harmoniques de ses oscillations. Enfin, il présente la propriété d'émettre une onde dont la fréquence varie peu avec la charge du circuit oscillant. Ce montage nous a permis de mettre au point une méthode de mesure de la constante diélectrique et de l'absorption basée sur la technique des comparaisons de fréquences à l'oscilloscope cathodique. On peut également envisager d'autres applications pratiques de cet oscillateur.

I. *Description de l'oscillateur.* — Ce montage dérive de l'oscillateur Franklin [1] dont le principe consiste à verrouiller un multivibrateur par un circuit oscillant. L'inconvénient du Franklin résulte de la liaison apériodique à haute impédance qui produit une variation très importante de l'amplitude avec la fréquence. Nous avons supprimé ce grave défaut en *substituant à cette liaison classique une liaison par la cathode* [2] dont la basse impédance est indépendante de la fréquence jusque vers 60^{Mc}. *Nous avons adjoint à cet oscillateur un limiteur d'amplitude* dont le rôle est de maintenir les oscillations sur la partie rectiligne de la caractéristique des tubes. On obtient donc le montage ci-après :

La résistance R_K sert de liaison entre les tubes T_1 et T_2 et fixe automatique-

---

(6) M. A. Buhl, *Nouveaux Éléments d'Analyse*, Paris, 1937.

(*) Séance du 12 août 1948.

(1) Fromy, *Mesures en radiotechnique*, Paris, 1948.

(2) Preismann, *R. C. A. Review*, 2, 1938, p. 421.

ment leur polarisation. Le tube T_1 est à *charge cathodique*, ce qui présente les avantages suivants :

1° une des bornes de la charge est à la masse; 2° la caractéristique de phase et d'amplitude est excellente; 3° l'impédance d'entrée du tube en parallèle sur le circuit oscillant est très élevée; 4° la capacité d'entrée est très faible; 5° l'impédance de sortie est très faible.

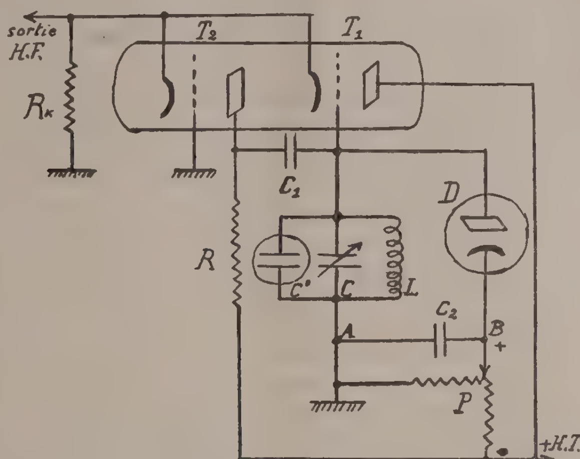


Fig. 1. — Tube T_1 T_2, 6 N7; tube D, RCA 955 monté en triode; $R_K = 500^{\omega}$; $R = 100\,000^{\omega}$; P = potentiomètre 5000^{ω}; $C_1 = 5^{cm}$; $C_2 = 0{,}1\ \mu F$; C = condensateur étalon; C′ = condensateur de mesure.

Pour adapter cette faible impédance de sortie au tube T_2 il faut l'*attaquer par la cathode* [3], ce qui conduit aux avantages suivants :

1° la grille de commande est à la masse, donc séparation électrostatique parfaite de l'entrée et de la sortie de l'étage T_2; 2° l'impédance d'entrée est faible, donc facile à adapter à la charge du tube T_1; 3° l'impédance d'entrée varie très peu avec la fréquence; 4° l'impédance de sortie (en parallèle sur le circuit oscillant) est très élevée. Toutes ces propriétés remarquables de la liaison par la cathode découlent de la contre-réaction élevée appliquée sur les tubes.

La diode D limite la tension de crête des oscillations à une valeur sensiblement égale à la tension continue entre A et B. Cette tension continue doit être sensiblement inférieure à la tension continue de polarisation des tubes mesurée aux bornes de R_K. De cette façon, les tubes fonctionnent sans aucun courant grille.

II. *Qualités de ce montage.* — 1° La *stabilité* de cet oscillateur est du même ordre que celle d'un oscillateur piézo-électrique sans thermostat (10^{-5} environ); 2° avec des selfs de bonne qualité *l'amplitude peut demeurer constante sur des*

---

(3) STRONG, *Electronics*, 13, 1940, p. 14.

gammes de fréquences très étendues; 3° le taux d'harmoniques est négligeable; 4° l'étalonnage varie peu avec l'âge des tubes; 5° la fréquence est indépendante de la charge du circuit oscillant. Nous avons pu vérifier cette propriété importante avec des résistances non selfiques dont nous avons mesuré la capacité parasite au pont de Nerst : le glissement de fréquence ne se produit qu'au voisinage immédiat du décrochage de l'oscillateur; cette charge maximum est d'autant plus importante que le circuit oscillant est de meilleure qualité.

III. *Application à des mesures de constante diélectrique.* — La méthode des deux oscillateurs dont on compare les fréquences par battements ou mieux à l'oscilloscope cathodique (Lissajous) conduisait fatalement à des erreurs dès que la substance étudiée présentait des pertes ([4]). En effet, dans tous les oscillateurs classiques, c'est le courant grille qui fournit automatiquement la polarisation du tube. Cette méthode de mesure n'est donc applicable qu'avec des oscillateurs fonctionnant en régime linéaire et sans aucun courant grille. On arrive à ce résultat en adaptant sur un oscillateur quelconque un limiteur d'amplitude et en diminuant le couplage d'entretien des oscillateurs par un taux élevé de contre-réaction ([5]).

Ainsi, *grâce au montage proposé, la méthode des deux oscillateurs peut s'appliquer non seulement à l'étude des corps non absorbants, mais également à celle des diélectriques absorbants.*

MICROSCOPE ÉLECTRONIQUE. — *Étude des sols de* V_2O_5 *au microscope électronique*. Note (*) de M. **Jean-Baptiste Donnet**, transmise par M. Aimé Cotton.

On sait depuis longtemps que les sols de pentoxyde de vanadium présentent la propriété de devenir fortement anisotropes sous l'influence d'un champ d'orientation comme le champ hydrodynamique : biréfringence d'écoulement ([1]), le champ électrique : effet Kerr ([2]), le champ magnétique : effet Cotton-Mouton ([3]), et que, à concentration suffisamment élevée, ces sols deviennent thixotropes ([4]).

Ces propriétés sont liées à l'existence dans le sol de particules de dimensions élevées par rapport aux dimensions de la molécule d'eau, ainsi que les examens ultra-microscopiques ([5]) avaient déjà permis de s'en rendre compte.

([4]) Guillien, *Cahiers de Physique*, 11, 1942, p. 17.

([5]) Arguimbau, *Proc. Inst. Radio Eng.*, 21, 1933, p. 14.

(*) Séance du 2 août 1948.

([1]) H. Freundlich, F. Stapfeld et H. Zocher, *Zs. f. Phys. Chem.*, **114**, 1935, p. 193.

([2]) J. Errera, *J. de Chim. Phys.*, 37, 1935, p. 68.

([3]) W. Heller et H. Zocher, *Physik Chemie*, 164, 1933, p. 55.

([4]) F. Juliusberger et A. Picquet, *Trans. Faraday Soc.*, 1936, p. 445.

([5]) H. Gessner, *Kolloid-Chemie Beihefte*, 2, 1924, p. 13.

Nous nous sommes proposé d'examiner au microscope électronique les particules contenues dans le sol pour connaître leur forme et leurs dimensions, ainsi que la dépendance de ces caractères des conditions de préparation et de l'âge de la solution.

Les solutions étudiées avec l'aide de Mlle Dubois ont été préparées par la méthode de Biltz ([6]) qui nous semble la meilleure des méthodes actuellement connues ([7]). Cette méthode consiste à disperser dans l'eau distillée le précipité de V_2O_5 obtenu en broyant dans un mortier du métavanadate d'ammonium et de l'acide chlorhydrique dilué en quantité légèrement supérieure à la quantité théorique. Les examens au microscope électronique montrent la co-existence dans le sol de particules solides se présentant sous divers aspects et principalement sous les suivants :

1° Microcristaux en aiguilles, cristallisées dans le système rhomboédrique.

2° Filaments longs et minces.

Dans les deux cas les dimensions des particules dépendent de l'âge et de la concentration des solutions.

Les photographies 1 et 2 montrent les cristaux.

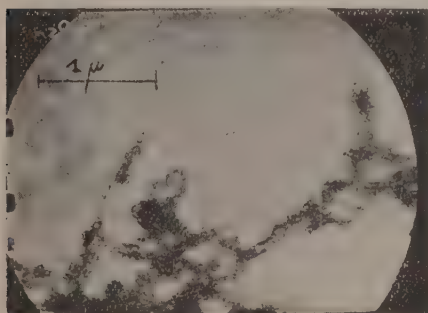


Fig. 1. — Cristaux (× 25000).



Fig. 2. — Cristaux (× 25000).

La photographie 1 correspond à une solution à 0,28 % en V_2O_5 examinée le lendemain de sa préparation. La solution a été diluée 4 à 5 fois au moment de l'examen. La photographie 2 correspond à une solution de concentration initiale de 0,105 % obtenue par centrifugation de 50 minutes à 20 000 tours/min d'une solution initiale à 0,13 %. Cette solution a été examinée 7 jours après sa préparation et diluée deux fois au moment de l'examen.

Les photographies 3, 4 et 5 montrent les fibres.

La photographie 3 a été obtenue avec une solution à 0,177 % examinée 4 jours après sa préparation et diluée environ 20 fois au moment de l'examen. La photographie 4 correspond à une solution à 0,13 %, la même que celle qui

---

([6]) W. Biltz, *Ber. der deutsch. Chem. Ges.*, 37, 1904, p. 1098.

([7]) E. Müller, *Kolloid-Zs.*, 8, 1911, p. 302; G. Wegelin, *Kolloid-Zs.*, 11, 1912, p. 25; 14, 1914, p. 65.

a donné lieu à la photographie 1, examinée 4 mois après sa préparation et diluée environ 20 fois au moment de l'examen. Enfin la photographie 5 a été

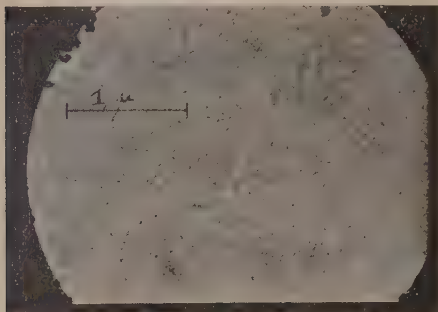


Fig. 3. — Fibres (× 25 000).

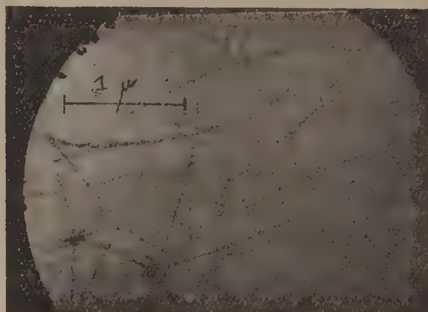


Fig. 4. — Fibres (× 25 000).

obtenue en examinant une solution à 0,18 %, examinée le lendemain de sa préparation, sans dilution préalable.

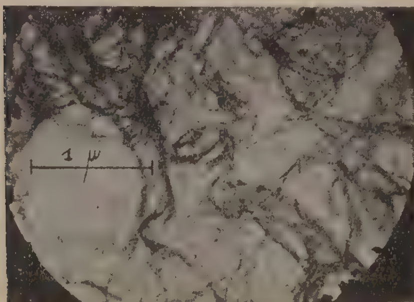
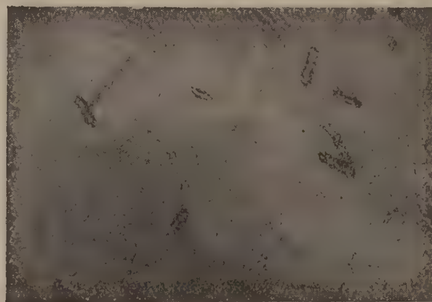


Fig. 5. — Fibres (× 25 000).


Fig. 6. — Fibres et microcristaux (× 610).

Les phases cristallines et filiformes qui coexistent dans la solution peuvent devenir visibles au microscope ordinaire dans les solutions vieilles de plusieurs mois, comme le montre la microphotographie 6 d'une solution à 0,142 %, âgée de deux mois.

N. B. — Les photographies 1, 2, 3, 4, 5 ont été prises au microscope électronique Siemens.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Formation d'α-amino-acides par la transposition de Beckmann des β-oximino-esters* $CH_3—C(=NOH)—CR_2—COOC_2H_5$. Note (*) de M. **Hugh Felkin**, transmise par M. Pierre Jolibois.

On sait, surtout grâce aux travaux de Meisenheimer (1921-1939), que les cétoximes aromatiques se transposent suivant le schéma

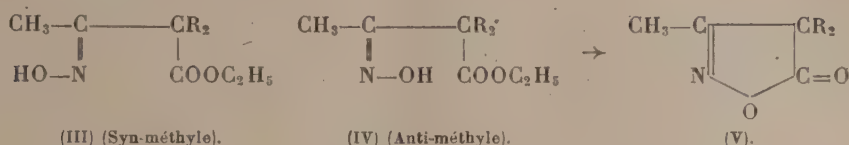


(*) Séance du 12 juillet 1948.

En série aliphatique, les cétoximes se transposent, en général, pour fournir un mélange des deux amides (I) et (II) dans des proportions qui varient suivant la nature des radicaux R′ et R″ [1].

Nous avons appliqué cette réaction aux oximes de quelques β-céto-esters de la forme $CH_3-CO-CR_2-COOC_2H_5$.

Certaines de ces oximes ont la propriété de se cycliser très facilement pour donner des isoxazolones [V; $R=CH_3$ [2], C_2H_5 et $CH_2-C_6H_5$], ce qui permet de supposer qu'elles existent sous la forme anti-méthyle (IV) et non sous la forme stéréo-isomère (III) :

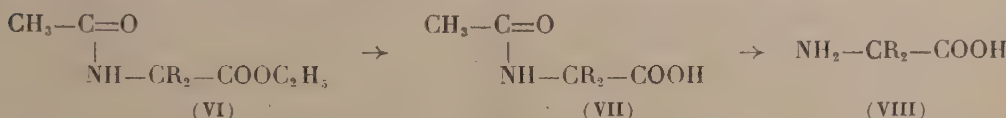


(III) (Syn-méthyle). (IV) (Anti-méthyle). (V).

Une constatation analogue a été faite par Hantsch [3], qui n'a pu préparer qu'à l'état d'isoxazolone (V, R = H) l'acide β-oximino-butyrique.

Par contre, dans le cas où $R = C_4H_9$, l'oxime ne s'est pas cyclisée; il est donc vraisemblable qu'elle existe sous la forme syn-méthyle (III).

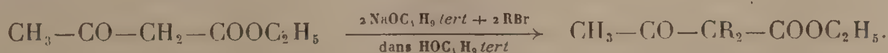
Or, nous avons constaté que l'action de l'acide sulfurique sur ces β-oximino-esters (III) et (IV) fournit surtout des dérivés des α-amino-acides (VIII) :



aussi bien dans le cas de l'oxime qui se cyclise (IV; $R = C_2H_5$), que dans celui de l'oxime qui ne se cyclise pas (III; $R = C_4H_9$).

Ainsi, il semble que, contrairement à ce qui a été constaté en série aromatique, il ne soit pas possible d'établir en série aliphatique une corrélation entre les produits de la transposition de Beckmann et la configuration des oximes, telle qu'elle apparaît d'après des expériences de cyclisation.

Partie expérimentale. — *Préparation de* $CH_3-CO-CR_2-COOC_2H_5$ [$R = C_2H_5$ [4]; $R = C_4H_9$ [5]; $R = CH_2-C_6H_5$ [6]]. — Ces ester sont été préparés en un seul stade :



(1) Hantsch, *Ber.*, 24, 1891, p. 4018.
(2) Billon, *A. Ch.*, (10), 7, 1927, p. 314.
(3) *Ber.*, 24, 1891, p. 495.
(4) Frankland et Duppa, *Ann.*, 138, 1866, p. 204.
(5) Hess et Bappert, *Ann.*, 441, 1925, p. 151.
(6) Ehrlich, *Ann.*, 187, 1877, p. 11.

La coupure « acide » des céto-esters, favorisée par l'éthylate de sodium, n'a presque pas lieu en présence de butylate tertiaire de sodium ([7]).

Préparation de $CH_3-C(=NOH)-CR_2-COOC_2H_5$ [III et IV; $R=C_2H_5$ ([8]); $R=C_4H_9$ ([7]); $R=CH_2-C_6H_5$ (F 117-119°)]. — Ces oximes ont été préparées par l'action de $NH_2OH.HCl$ sur les β-céto-esters, en présence de pyridine. L'emploi de celle-ci améliore les rendements en empêchant la formation d'isoxazolone.

Formation d'isoxazolones (V). — Distillées sous vide ou chauffées en milieu potasse alcoolique, les oximes ($R=C_2H_5$ et $R=CH_2-C_6H_5$) fournissent aisément les isoxazolones correspondantes : $R=C_2H_5$: F 41-42°, $É_{15}$ 117-121°; $R=CH_2-C_6H_5$: F 135-136°, $É_3$ 210°.

Transposition de Beckmann. Obtention d'α-amino-acides. — Parmi les agents de transposition étudiés (H_2SO_4, CH_3-COCl, PCl_5) c'est l'acide sulfurique à 85 % qui a donné les meilleurs résultats. Ainsi, les β-oximino-esters (IV, $R=C_2H_5$ et III, $R=C_4H_9$) ont tous les deux fourni les α-acétylamino-acides $CH_3-CO-NH-CR_2-COOH$ [VII, $R=C_2H_5$, F 220° (bloc); $R=C_4H_9$, F 190-191°]. Saponifiés par H_2SO_4 à 50 %, ceux-ci ont fourni les α-amino-acides (VIII) correspondants [$R=C_2H_5$ ([9]); $R=C_4H_9$ ([10])], avec un rendement de 25 à 40 % à partir des β-oximino-esters.

En opérant avec H_2SO_4 concentré sur l'oxime (IV, $R=C_2H_5$) un peu d'α-acétylamino-ester (VI) $CH_3-CO-NH-C(C_2H_5)_2-COOC_2H_5$ (F 88-89°, $É_3$ 142-146°) a pu être isolé.

L'oxime (IV, $R=CH_2-C_6H_5$), ainsi que les isoxazolones décrites ci-dessus, ne se sont pas transposées.

Conclusion. — Les β-oximino-esters $CH_3-C(=NOH)-CR_2-COOC_2H_5$, soumis à la transposition de Beckmann, fournissent des α-amino-acides NH_2-CR_2-COOH avec des rendements pouvant atteindre 40 %.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'oxydation du diméthyl-2.4 pentadiène-2.4.* Note ([*]) de MM. **René Jacquemain** et **Jean Berger**, présentée par M. Marcel Delépine.

Dans une précédente Note ([1]) nous avons développé une théorie expliquant l'influence des molécules polaires sur les réactions organiques et montré qu'on

---

([7]) Renfrow et Renfrow, *J. Am. Chem. Soc.*, 68, 1946, p. 1801.

([8]) Betti, *Gazz.*, 28, I, 1898, p. 274.

([9]) Tiemann et Friedländer, *Ber.*, 14, 1881, p. 1967.

([10]) Huang, Lin, Li et Li, *J. Chin. Chem. Soc.*, 8, 1941, p. 201; *Chem. Abstr.*, 37, 1943, p. 6248.

([*]) Séance du 12 juillet 1948.

([1]) R. Jacquemain et J. Berger, *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 698.

en pouvait déduire que, suivant la concentration et la température, il en pouvait résulter une catalyse positive ou négative.

L'étude de l'influence de la concentration et de la température est surtout intéressante dans le cas des réactions autocatalytiques dans lesquelles c'est le produit de la réaction qui constitue la substance polaire catalysante.

C'est ainsi que, dans le cas de l'oxydation à pression constante du diméthyl-2.4 pentadiène-2.4, par l'oxygène gazeux, à la température de 15-20° ([2]), nous trouvons qu'une partie de la vitesse de réaction peut être représentée par $dv/dt = K(V^0 - 1,3V)V$.

Dans cette formule, nous désignons par V^0 l'équivalent en oxygène de la concentration du carbure et par V celui de la concentration en peroxyde formé, V étant le volume moyen d'après la définition de G. Dupont ([3]).

Les chiffres trouvés sont groupés dans le tableau I donnant la vitesse de fixation de l'oxygène par le diène à 15-20°.

Le diméthyl-2.4 pentadiène-2.4 aura presque absorbé la quantité équimoléculaire d'oxygène ($V^0 = 4480^{cm^3}$), mais finalement avec une vitesse négligeable.

Il résulte de ce tableau que la constante K de la vitesse de réaction calculée d'après la fonction ci-dessus est d'abord grande, elle décroît pour se stabiliser aux environs de 0,0700, indiquant qu'elle est à peu près proportionnelle à la concentration du peroxyde et après l'absorption de 2070^{cm^3} d'oxygène, elle décroît de nouveau pour s'annuler complètement à la fin.

Tout ceci est conforme à ce que nous avions prévu sur l'influence de la concentration dans l'exposé de notre théorie ([1]).

Dans le cas de l'oxydation à 40-45° et 60-65°, la réaction est toujours autocatalytique au début, mais, après le maximum, la chute de vitesse est plus grande que dans le cas de l'oxydation à la température ordinaire pour s'arrêter complètement après l'absorption de 66 % d'oxygène à 40-45° et de 18 à 20 % d'oxygène à 60-65°. Un abaissement de température fait réapparaître l'absorption et sa vitesse est déterminée par la teneur en peroxyde et la température.

C'est donc une réaction d'équilibre.

Comme l'hydrocarbure oxydé à 80 % et chauffé à 40-60° ne dégage pas d'oxygène, nous sommes en présence d'un équilibre unilatéral, dû sans doute à l'inversion de la catalyse conformément à ce que nous avons exposé dans une Note précédente ([1]).

Des Notes paraîtront prochainement sur la vitesse de formation des sels d'ammonium quaternaires et sur la vitesse de fixation de l'iode par les hydrocarbures éthyléniques, où il sera démontré l'importance de la polarité des catalyseurs.

([2]) R. JACQUEMAIN, *Thèse Sciences*, Paris, 1943, p. 131.

([3]) G DUPONT et ses collaborateurs, *Bull. Soc. Chim.*, 1930, p. 47 et suiv.

TABLEAU I.

$\frac{dv}{dt}$ (en min.).	V.	$\frac{dv}{dt}\frac{1.10^9}{(V^\circ-1,3V)V}=K$.	$\frac{dv}{dt}$ (en min.).	V.	$\frac{dv}{dt}\frac{1.10^9}{(V^\circ-1,3V)V}=K$
0,0000925	40	0,4020	0,000335	1445	0,0687
0,000133	137	0,1740	0,000382	1755	0,0760
0,000144	257	0,1040	0,000346	2070	0,0720
0,000162	390	0,0725	0,000266	2335	0,0607
0,000192	530	0,0680	0,000139	2510	0,0635
0,000254	710	0,0775	....	....	......
0,000254	920	0,0643	....	....	......
0,000312	1165	0,0693	0,000	4400	0,000

TABLEAU II.

Vitesse d'absorption de l'oxygène par le diméthyl-2.4 pentadiène-2.4 à 40-45°.

$\frac{dv}{dt}$ (en heures).	V.	$\frac{dv}{dt}$ (en heures).	V.	$\frac{dv}{dt}$ (en heures).	V.
60........	30	160.......	600	260.......	2530
50........	85	200.......	780	180.......	2750
95........	167	280.......	1020	180.......	2930
90........	255	320.......	1310	140.......	3080
115........	352	300.......	1630	100.......	3210
110........	465	310.......	1935	40.......	3280
		310.......	2245	0.......	3300

TABLEAU III.

Vitesse d'absorption à 60-65°.

$\frac{dv}{dt}$ (en heures).	V.	$\frac{dv}{dt}$ (en heures).	V.	$\frac{dv}{dt}$ (en heures).	V.
120........	60	60.......	552	15.......	675
140........	190	25.......	617	10.......	690
155........	337	25.......	642	7.......	750
130........	480	15.......	662	2.......	820

Les résultats des travaux en cours sur la vitesse de fixation du soufre sur les doubles liaisons peuvent être interprétés de la même façon.

BACTÉRIOLOGIE. — *Augmentation de la thermorésistance d'un antigène bactériophagique traité par le formol.* Note (*) de MM. **Pierre Nicolle** et **Paul Ducrest**, présentée par M. Jacques Tréfouël.

On sait que les Bactériophages sont doués de propriétés antigéniques; ils provoquent notamment l'apparition d'anticorps neutralisants spécifiques dans le sérum des animaux auxquels ils ont été injectés.

(*) Séance du 26 juillet 1948.

Un chauffage modéré les inactive totalement. Pour certains auteurs, l'inactivation ainsi produite s'accompagne de la perte des propriétés antigéniques [1], tandis que, pour d'autres, seul un chauffage sévère (de 100 à 120°C.) aboutit à ce résultat [2].

D'autre part, on admet généralement que le formol, malgré un pouvoir d'inactivation très puissant, laisse intacte l'antigénicité des Bactériophages [3].

Par analogie avec l'effet stabilisateur du formol sur certains antigènes, notamment les toxines, nous avons cherché si cet aldéhyde n'augmenterait pas la résistance à la chaleur des antigènes bactériophagiques. Nous avons utilisé le Bactériophage staphylococcique Twort actif sur le staphylocoque blanc Twort. Les lysats destinés aux injections ont été préparés en milieu peptoné dilué (peptone 3 $^0/_{00}$) suivant une technique publiée antérieurement [4].

Leurs titres bactériophagiques, avant l'injection, le chauffage ou la formolisation, variaient assez peu entre 1 et 8×10^8. Les lapins ont été traités, sauf exceptions, par une seule injection intrapéritonéale massive de lysat (150 à 175$^{cm^3}$). Dans ces conditions, le pouvoir neutralisant des sérums atteint son maximum, dans la majorité des cas, aux environs du 30e jour.

Il n'est pas sans intérêt de signaler, avant de rapporter les résultats expérimentaux, que sur 34 lapins neufs, 5, soit 14 %, ont présenté un sérum doué de faibles propriétés neutralisantes vis-à-vis du Bactériophage staphylococcique Twort. Ces lapins positifs n'ont pas été utilisés dans les expériences rapportées ici.

1° *Bactériophage actif* (Lysats non traités). — Six lapins ont reçu le Bactériophage actif. Le sérum de quatre d'entre eux a montré, le 30e jour, un pouvoir neutralisant élevé, jusqu'à la dilution à 1 pour 5000. Les deux autres lapins n'ont pas élaboré d'anticorps; l'un d'eux était manifestement malade [5]; l'autre paraissait normal. La proportion des lapins n'ayant pas réagi à l'injection du Bactériophage actif, rapportée à l'ensemble des lapins qui sont devenus positifs, a été de 2 sur 16, soit 12, 5 %.

---

(1) E. W. SCHULTZ, J. S. QUIGLEY et L. T. BULLOCK, *J. Immunol.*, 17, 1929, p. 245.

(2) L. ARNOLD et E. WEISS, *J. Infect. Dis.*, 35, 1924, p. 603; I. N. ASHESHOW, *C. R. Soc. Biol.*, 93, 1935, p. 1327; F. D'HÉRELLE, *Le Bactériophage et son comportement*, Paris; I. J. KLIGLER, OLEINIK et CZAZKES, *Am. J. Publ. Health.*, 33, 1943, p. 682; R. S. MUCKENFUSS, *J. Exp. Biol.*, 48, 1928, p. 709.

(3) H. MORIYAMA et S. H. OHASHI, *Arch. f. ges. Virusforsch.*, 1, 1939, p. 252; R. S. MUCKENFUSS, *loc. cit.*; E. W. SCHULTZ, J. S. QUIGLEY et L. T. BULLOCK, *loc. cit.*; E. W. SCHULTZ et L. GEBHARDT, *Proc. Soc. exp. Biol. a. Med.*, 32, 1935, p. 1111.

(4) P. NICOLLE et P. DUCREST, *Ann. Institut Pasteur*, 74, 1948, p. 85.

(5) Diarrhée, amaigrissement. Rétabli, il a reçu une nouvelle dose de Bactériophage actif, sans plus de succès. Après une troisième injection, le sérum est devenu légèrement positif. Sacrifié quelques semaines après, son autopsie n'a rien révélé de particulier, à part l'hypertrophie de ganglions mésentériques.

2° *Bactériophage chauffé* (Lysats chauffés suivant les cas à 70, 75, 77 ou 80° C., pendant 1 heure). — Sur 8 lapins, 7 ont donné un sérum négatif, ou positif seulement aux plus basses dilutions (1 pour 10). Un seul lapin a fourni un sérum aussi fortement positif que ceux des lapins du premier groupe. Malgré cette anomalie, le résultat est net : l'antigène responsable de la formation des anticorps neutralisants est détruit, dans sa majeure partie, par un chauffage d'une heure entre 70 et 80° C.

3° *Bactériophage formolé* (Lysats additionnés de 1 goutte de formol commercial à 30 % et laissés à l'étuve à 37° C. pendant 18 heures). — Le sérum des 5 lapins de ce groupe a été fortement positif jusqu'aux dilutions les plus élevées (1 pour 2000 et 1 pour 5000). L'inactivation par le formol ne diminue donc en aucune façon le pouvoir antigénique de ce Bactériophage. Elle paraît même plutôt l'augmenter.

4° *Bactériophage chauffé, puis formolé.* — Le sérum de l'unique lapin ainsi traité a été complètement négatif. C'est un témoin de plus pour la destruction de l'antigène bactériophagique par la chaleur. L'addition de formol, après le chauffage ne rend pas son activité à cet antigène inactivé.

5° *Bactériophage formolé, puis chauffé.* — Les six lapins de ce groupe ont donné un sérum positif. Le pouvoir neutralisant était très fort dans le cas du chauffage à 70° C. et à 75° C., sensiblement moins fort dans le cas du chauffage à 77° C., et relativement faible dans le cas du chauffage à 80° C.

Les propriétés antigéniques du Bactériophage staphylococcique Twort traité préalablement par le formol résistent donc au chauffage, alors qu'en l'absence de la formolisation elles sont détruites.

Conclusions. — La netteté des résultats malgré le petit nombre d'expériences réalisées jusqu'à ce jour et la présence de quelques anomalies, nous autorise à penser que le formol exerce sur les antigènes bactériophagiques une action protectrice vis-à-vis de la chaleur.

Cet effet est à rapprocher d'une part de la thermorésistance antigénique des toxines formolées (anatoxines), d'autre part de l'action anticoagulante du formol sur le sérum sanguin chauffé ([6]).

La séance est levée à 15h30m.

R. C.

([6]) Legroux, *C. R. Soc. Biol.*, 83, 1920, p. 466.